Глава 8

ВОЗДЕЙСТВИЕ НА НЕЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ БОЛЬШИХ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 8.1. Вводные замечания

В этой и последующих главах рассматриваются процессы, происходящие в схемах с нелинейными сопротивлениями при наличии в них больших синусоидальных колебаний. К таким процессам относятся: генерирование синусоидальных колебаний и усиление их при больших амплитудах, модуляция, умножение и преобразование частоты, детектирование.

Рассмотрение процессов будем вести широко распространенным методом, который назовем *методом первой гармоники*.

При анализе процессов этим методом пренебрегают в первом приближении высшими гармониками напряжения, действующего на нелинейное сопротивление, считая его синусоидальным. После нахождения приближенного решения последнее иногда уточняют, учитывая гармоники.

§ 8.2. Воздействие синусоидального напряжения на нелинейное сопротивление (общий случай)

Рассмотрим ток, протекающий через нелинейное сопротивление с вольтамперной характеристикой $i = f(u)$, если к этому сопротивлению приложено напряжение

$$u = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0 + U_m \cos\alpha, \qquad (8.1)$$

где ω_0 — постоянная величина, t — время.

Остальные величины, входящие в это уравнение, могут быть как постоянными, так и переменными.

Выражение (8.1) охватывает все виды модулированных колебаний.

Условимся называть:

U_0 — нулевой составляющей,

$U_m \cos\alpha$ — первой гармоникой напряжения,

U_m — амплитудой,

$\alpha = \omega_0 t + \varphi$ — фазой,

$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}$ — угловой частотой,
φ — сдвигом фаз первой гармоники.

Величина u может быть как напряжением, воздействующим на нелинейное сопротивление (например, анодным напряжением при постоянном напряжении на сетке), так и некоторым управляющим параметром (например, напряжением на сетке многоэлектродной лампы при постоянных напряжениях на остальных электродах).

Примем вначале, что величины U_0, U_m и α не зависимы друг от друга и от времени.

Поскольку при заданных U_0 и U_m напряжение u является периодической функцией величины α, ток $i = f(u)$ также будет периодической функцией α и может быть представлен рядом Фурье:

$$i = f(u) = f(U_0 + U_m \cos\alpha) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\alpha. \quad (8.2)$$

Величина u и, следовательно, левая часть этого равенства не меняют своего значения при изменении знака α.

То же должно быть и с правой частью равенства. Поэтому всегда должно выполняться условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\alpha = 0.$$

Значения A_0, A_1, A_2, A_3 и т. д. могут быть найдены из формулы:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_m \cos\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha. \quad (8.3)$$

При отыскании этого интеграла следует считать величины U_0 и U_m *независимыми* от α, т. е. *постоянными*.

Из выражения (8,3) видно, что величины $A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots$ не зависят от α и зависят лишь от U_0, U_m, k и характеристики нелинейного сопротивления.

Введя новые обозначения: $F_0(U_0, U_m) = A_0$, $F_k(U_0, U_m) = A_k$, перепишем ф-лу (8.2):

$$i = f(U_0 + U_m \cos\alpha) = \frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) + F_1(U_0, U_m) \cos\alpha + \\ + F_2(U_0, U_m) \cos 2\alpha + \ldots + F_k(U_0, U_m) \cos k\alpha + \ldots, \quad (8.4а)$$

где

$$F_k(U_0, U_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(U_0 + U_m \cos\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha. \quad (8.4б)$$

Равенство (8.4а) справедливо при *любых* значениях U_0, U_m и α и остается справедливым, когда эти величины *любым образом* *меняются во времени*. Однако, как отмечалось при вычислении интеграла (8.4б), нужно считать, что U_0 и U_m *не зависимы* от α, т. е. *постоянны*.

Нулевой член правой части равенства (8.4а) назовем *нулевой составляющей* тока, первый — *первой гармоникой* тока, второй — *второй гармоникой* и т. д. Нулевая составляющая $\frac{1}{2}F_0(U_0, U_m)$ и амплитуды гармоник $F_k(U_0, U_m)$ зависят только от U_0, U_m и характеристики.

Если U_0 и U_m меняются во времени, то нулевая составляющая и амплитуды гармоник могут быть переменными; если U_0 и U_m постоянны (например, при ЧМ), то *постоянны* $\frac{1}{2}F_0(U_0, U_m)$ и $F_k(U_0, U_m)$.

Фаза и частота первой гармоники тока соответственно равны фазе α и частоте $\frac{d\alpha}{dt}$ первой гармоники подведенного напряжения, *фаза и частота k-й гармоники тока* соответственно равны $k\alpha$ и $k\frac{d\alpha}{dt}$, т. е. *в k раз больше фазы и частоты первой гармоники напряжения*.

Нулевая составляющая и амплитуды гармоник тока могут быть найдены по ф-ле (8.4б), если представить (аппроксимировать) вольтамперную характеристику нелинейного сопротивления таким аналитическим выражением, которое позволит вычислить интеграл (8.4б).

§ 8.3. Аппроксимация характеристик ломаной прямой

Вольтамперные характеристики ряда нелинейных сопротивлений могут быть аппроксимированы ломаной прямой (рис. 8.1). Отметим, что при использовании лишь начального участка характеристики OA, например, при малых переменных напряжениях, эта аппроксимация может приводить к большим ошибкам.

Если вольтамперная характеристика аппроксимируется ломаной прямой, то аналитически ток выражается следующим образом:

$$\begin{gathered} i = 0 \quad \text{при} \quad u \leqslant U_н, \\ i = S(u - U_н) \quad \text{при} \quad u > U_н. \end{gathered}$$

Здесь S — крутизна наклонной прямой части характеристики, $U_н$ — напряжение, при котором начинается ток, т. е. происходит излом характеристики.

На рис. 8.2*а* изображена вольтамперная характеристика нелинейного сопротивления, аппроксимированная ломаной прямой: на рис. 8.2*б* — зависимость напряжения $u = U_0 + U_m \cos\alpha$ от α и на рис. 8.2*в* — зависимость тока $i = f(u)$ от α, построенная на основании рис. 8.2*а* и 8.2*б*.

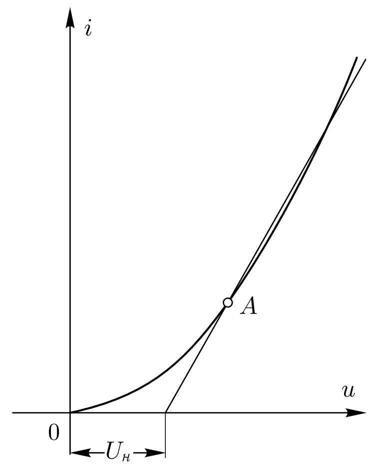

Рис. 8.1

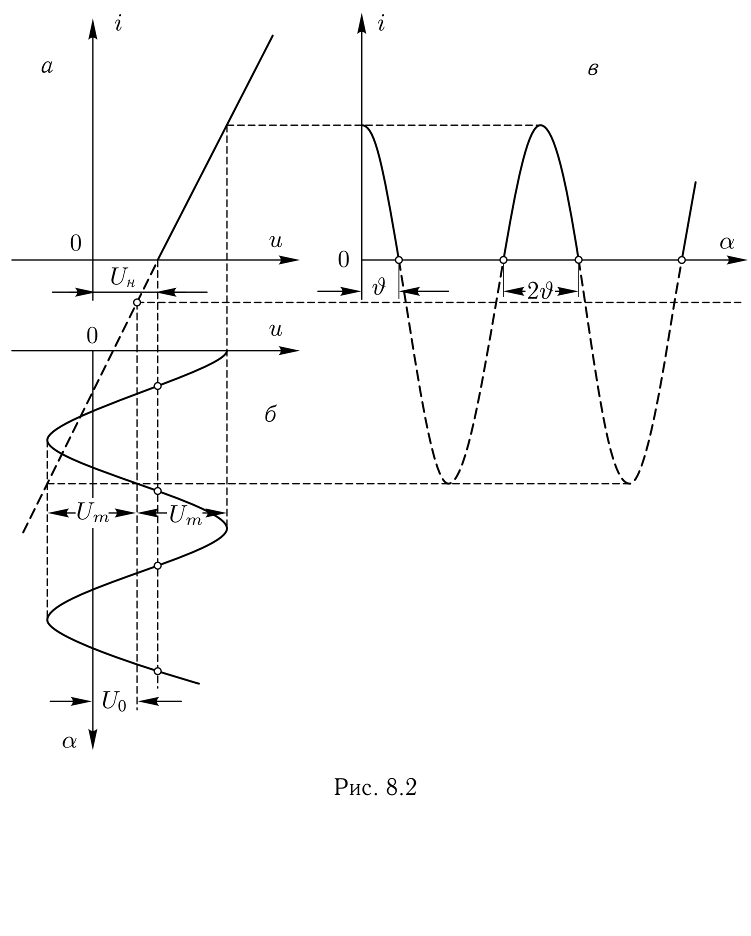

Рис. 8.2

Ток i выражается уравнениями:

$$i = 0 \quad \text{при} \quad u \leqslant U_н,$$
$$i = S(U_0 + U_m \cos\alpha - U_н) \quad \text{при} \quad u > U_н.$$

Переход от одного уравнения к другому происходит при значениях α, определяемых из равенства:

$$u = U_0 + U_m \cos\alpha = U_н. \tag{8.5}$$

Назовем углом отсечки тока или просто углом отсечки ϑ половину той части периода, выраженной в угловой мере, в течение которой через нелинейное сопротивление протекает ток. Угол отсечки может быть найден на основании равенства (8.5) из следующего уравнения:

$$\cos\vartheta = \frac{U_н - U_0}{U_m}. \tag{8.6}$$

Нулевая составляющая тока равна:

$$\frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(u)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\vartheta}^{+\vartheta} S(u - U_н)\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\vartheta}^{+\vartheta} S(U_0 + U_m \cos\alpha - U_н)\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\vartheta}^{+\vartheta} S(U_0 - U_н)\, d\alpha +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\vartheta}^{+\vartheta} SU_m \cos\alpha\, d\alpha = \frac{S}{\pi}\,(U_0 - U_н)\vartheta + \frac{SU_m}{\pi}\,\sin\vartheta.$$

Замена пределов интегрирования $-\pi$, $+\pi$ на $-\vartheta$, $+\vartheta$ произведена здесь потому, что в интервалах $(-\pi, -\vartheta)$ и $(+\vartheta, +\pi)$ функция $f(u) = 0$.

Подставляя вместо $(U_0 - U_н)$ его значение из ф-лы (8.6):

$$U_0 - U_н = -U_m \cos\vartheta,$$

получим

$$\frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) = \frac{SU_m}{\pi}\,(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta). \tag{8.7}$$

Таким образом, если заданы величины U_0, U_m и характеристика нелинейного сопротивления, т. е. $U_н$ и S, то сначала по ф-ле (8.6) находят $\cos\vartheta$ и ϑ, а затем из выражения (8.7) — нулевую составляющую тока $\frac{1}{2} F_0(U_0, U_m)$.

Часто в ф-лу (8.7) вместо U_m подставляют максимальное значение тока $I_м$, равное

$$I_м = S(U_0 + U_m - U_н) = SU_m(1 - \cos\vartheta). \tag{8.8}$$

Тогда

$$SU_m = \frac{I_м}{1-\cos\vartheta}$$

и

$$\frac{1}{2}\,F_0(U_0,\,U_m) = \frac{I_м}{\pi}\cdot\frac{\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}. \tag{8.9}$$

Аналогичным способом могут быть найдены амплитуды гармоник тока, которые оказываются разными:

$$F_1(U_0,\,U_m) = \frac{SU_m'}{\pi}\,(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta) = \frac{I_м}{\pi}\cdot\frac{\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}, \tag{8.10}$$

$$\underset{k>1}{F_k(U_0,\,U_m)} = \frac{2SU_m}{\pi}\cdot\frac{\sin k\vartheta\cos\vartheta - k\cos k\vartheta\sin\vartheta}{k(k^2-1)} = \\ = \frac{2I_м}{\pi}\cdot\frac{\sin k\vartheta\cos\vartheta - k\cos k\vartheta\sin\vartheta}{k(k^2-1)(1-\cos\vartheta)}. \tag{8.11}$$

На рис. 8.3 изображены зависимости:

$$\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2}\,F_0(U_0,\,U_m)}{I_м},\quad \alpha_1 = \frac{F_1(U_0,\,U_m)}{I_м},$$
$$\alpha_2 = \frac{F_2(U_0,\,U_m)}{I_м}\quad \text{и}\quad \alpha_3 = \frac{F_3(U_0,\,U_m)}{I_м}.$$

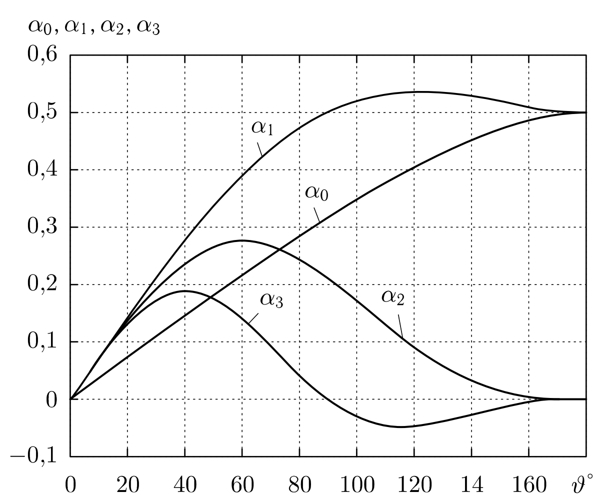

Рис. 8.3

Эти зависимости называются функциями академика А.И. Берга, который ввел их в радиотехнику.

На рис. 8.4 изображены зависимости:

$$\gamma_0 = \frac{\frac{1}{2}\,F_0(U_0, U_m)}{SU_m} \quad \text{и} \quad \gamma_k = \frac{F_k(U_0, U_m)}{SU_m}$$

при $k = 1$, 2 и 3.

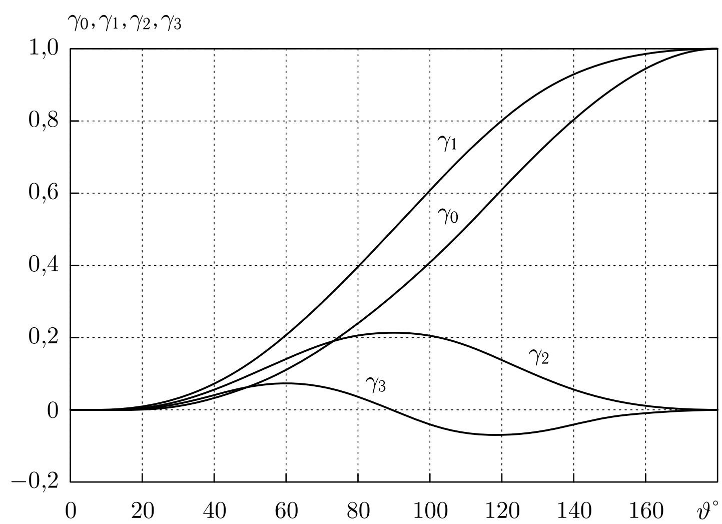

Рис. 8.4

Иногда характеристику аппроксимируют ломаной прямой не с одним, как это было рассмотрено выше, а с большим количеством изломов. Этот случай мы рассматривать не будем.

Пример 8.1

На сетку лампы с характеристикой $t_a = f(u_c)$, аппроксимированной ломаной прямой, подается напряжение:

$$u_c = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -10 + 8\cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ В}.$$

Уравнение характеристики:

$$i_a = 0 \quad \text{при} \quad u_c \leqslant U_н = -6 \text{ В}.$$

$$i_a = S(u_c - U_н) \quad \text{при} \quad u_c > U_н; \quad S = 5 \text{ мА/В}.$$

Найти максимальное значение, нулевую составляющую и амплитуду первой гармоники анодного тока.

Решение

1. По ф-ле (8.6) определяем угол отсечки анодного тока:

$$\cos\vartheta = \frac{U_н - U_0}{U_m} = \frac{-6-(-10)}{8} = 0{,}5,$$

откуда $\vartheta = 60^\circ$.

2. По ф-ле (8.8) находим максимальное значение анодного тока:

$$I_м = SU_m(1-\cos\vartheta) = 5 \cdot 8(1-0{,}5) = 20 \text{ мА}.$$

3. По ф-лам (8.7) и (8.10) определяем нулевую составляющую и амплитуду первой гармоники:

$$I_{a0} = \frac{1}{2}\,F_0(U_0,\,U_m) = \frac{SU_m}{\pi}\,(\sin\vartheta - \vartheta\cos\vartheta) = \\ = \frac{5\cdot 8}{3{,}14}\,(0{,}866 - 1{,}05\cdot 0{,}5) = 4{,}4 \text{ мА},$$

$$I_{a1} = F_1(U_0,\,U_m) = \frac{SU_m}{\pi}\,(\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta) = \frac{5\cdot 8}{3{,}14}\,(1{,}05 - 0{,}866\cdot 0{,}5) = 7{,}8 \text{ мА}.$$

С другой стороны, I_{a0} и I_{a1} могут быть определены с помощью рис. 8.3:

$$I_{a0} = \alpha_0 I_{м} = 0{,}22\cdot 20 = 4{,}4 \text{ мА},$$
$$I_{a1} = \alpha_1 I_{м} - 0{,}39\cdot 20 = 7{,}8 \text{ мА},$$

либо с помощью рис. 8.4:

$$I_{a0} = \gamma_0 SU_m = 0{,}11\cdot 5\cdot 8 = 4{,}4 \text{ мА},$$
$$I_{a1} = \gamma_1 SU_m = 0{,}195\cdot 5\cdot 8 = 7{,}8 \text{ мА}.$$

§ 8.4. Аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений степенным рядом

Способ аппроксимации вольтамперной характеристики с помощью *степенного ряда*, к изложению которого мы переходим, особенно удобен при *малых колебаниях*, хотя пригоден и для больших.

Разложим характеристику нелинейного сопротивления в ряд Тейлора относительно значения $u = U_0$:

$$i = f(u) = a_0 + a_1(u-U_0) + a_2(u-U_0)^2 + \\ + a_3(u-U_0)^3 + \ldots + a_k(u-U_0)^k + \ldots, \quad (8.12)$$

где

$$a_0 = f(U_0); \quad a_k = \frac{f^{(k)}(U_0)}{k!};$$

$f^{(k)}(U_0)$ — k-я производная функции $f(u)$ для значения $u = U_0$.

Подставляя в ряд (8.12) значение $u = U_0 + U_m\cos\alpha$, получим

$$i = f(u) = a_0 + a_1U_m\cos\alpha + a_2U_m^2\cos^2\alpha + \ + a_3U_m^3\cos^3\alpha + \ldots. \quad (8.13)$$

Поскольку

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\cos 2\alpha,$$
$$\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\,\cos\alpha + \frac{1}{4}\,\cos 3\alpha,$$
$$\cos^4\alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\,\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$$

и т. д. можно, собирая члены с косинусами одинаковых аргументов и вынося их за скобки, переписать ф-лу (8.13) следующим образом:

$$i = f(U_0 + U_m \cos\alpha) = \frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) + F_1(U_0, U_m)\cos\alpha + \\ + F_2(U_0, U_m)\cos 2\alpha + \ldots + F_k(U_0, U_m)\cos k\alpha + \ldots, \quad (8.14)$$

где

$$\frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \ldots + \\ + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} a_{2n} U_m^{2n} + \ldots \quad (8.15)$$

$$F_1(U_0, U_m) = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \ldots + \\ + \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!(n+1)!} a_{2n+1} U_m^{2n+1} + \ldots \quad (8.16)$$

$$F_2(U_0, U_m) = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \frac{15}{32} a_6 U_m^6 + \\ + \ldots + \frac{(2n+2)!}{2^{2n+1} \cdot n!(n+2)!} a_{2n+2} U_m^{2n+2} + \ldots \quad (8.17)$$

. . . .

$$F_k(U_0, U_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+k)!}{2^{2n+k-1} n!(n+k)!} a_{2n+k} U_m^{2n+k}. \quad (8.18)$$

Из выражений для $\frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) \ldots, F_k(U_0, U_m)$ видно, что *нулевая составляющая тока и амплитуды четных гармоник зависят только от четных членов разложения* (*четных производных в рабочей точке*), *амплитуды нечетных гармоник — от нечетных*. Кроме того, *амплитуда k-й гармоники зависит от членов разложения порядка k и выше и не зависит от членов разложения с порядком меньшим, чем k*.

Коэффициенты a_0 находят путем дифференцирования характеристики нелинейного сопротивления. Пусть, например, характеристика выражается уравнением:

$$i = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3.$$

Тогда

$$a_0 = f(U_0) = b_0 + b_1 U_0 + b_2 U_0^2 + b_3 U_0^3,$$
$$a_1 = \frac{f'(U_0)}{1!} = b_1 + 2b_2 U_0 + 3b_3 U_0^2,$$
$$a_2 = \frac{f''(U_0)}{2!} = b_2 + 3b_3 U_0,$$
$$a_3 = \frac{f'''(U_0)}{3!} = b_3.$$

Если характеристика задана графически, то ее можно представить степенным рядом с $n+1$ членами, причем полученный ряд будет совпадать с характеристикой в $(n+1)$-й точке. Для этого нужно составить $n+1$ уравнение:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = a_0 + a_1(u_1 - U_0) + a_2(u_1 - U_0)^2 + \ldots + a_n(u_1 - U_0)^n \\ i_2 = a_0 + a_1(u_2 - U_0) + a_2(u_2 - U_0)^2 + \ldots + a_n(u_2 - U_0)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_{n+1} = a_0 + a_1(u_{n+1} - U_0) + a_2(u_{n+1} - U_0)^2 + \ldots + a_n(u_{n+1} - U_0)^n \end{array}\right\} \tag{8.19}$$

Здесь i_1, i_2z, $\ldots$, i_{n+1} — значения токов при напряжениях, соответственно равных u_1, u_2, $\ldots$, u_{n+1}.

Решая систему ур-ний (8.19), находим a_0, a_1, $\ldots$, a_n. Решения этих уравнений для двух частных случаев даны в приложении 2.

Величины $1/2\,F_0(U_0, U_m)$, $F_1(U_0, U_m)$, $F_2(U_0, U_m)$ могут быть приближенно определены графически. Ток, протекающий через нелинейное сопротивление при максимальном значении напряжения $U_0 + U_m$, в соответствии с (8.1) и (8.12) (рис. 8.5) равен

$$i_1 = f(U_0 + U_m) = a_0 + a_1 U_m + a_2 U_m^2 + a_3 U_m^3 + a_4 U_m^4 + \ldots.$$

Ток при минимальном значении напряжения равен

$$i_2 = f(U_0 - U_m) = a_0 - a_1 U_m + a_2 U_m^2 - a_3 U_m^3 + a_4 U_m^4 - \ldots.$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{t_1 - t_2}{2} = a_1 U_m + a_3 U_m^3 + a_5 U_m^5 + \ldots.$$

Сравнивая полученное выражение с ф-лой (8.16), мы видим, что

$$F_1(U_0, U_m) \approx \frac{t_1 - t_2}{2}. \tag{8.20}$$

Это равенство будет точным, если характеристика является квадратичной параболой, и приближенным, если в разложении имеются члены a_3, a_5, a_7 и т. д.

Ток при среднем значении напряжения u равен

$$i_{cp} = f(U_0) = a_0.$$

Нетрудно показать что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{i_1 + i_2}{2} - i_{cp}\right) = \frac{1}{2}\,a_2 U_m^2 + \frac{1}{2}\,a_4 U_m^4 + \ldots. \tag{8.21}$$

Сравнивая это равенство с (8.17), мы видим, что

$$F_2(U_0, U_m) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{i_1 + i_2}{2} - i_{cp}\right). \tag{8.22}$$

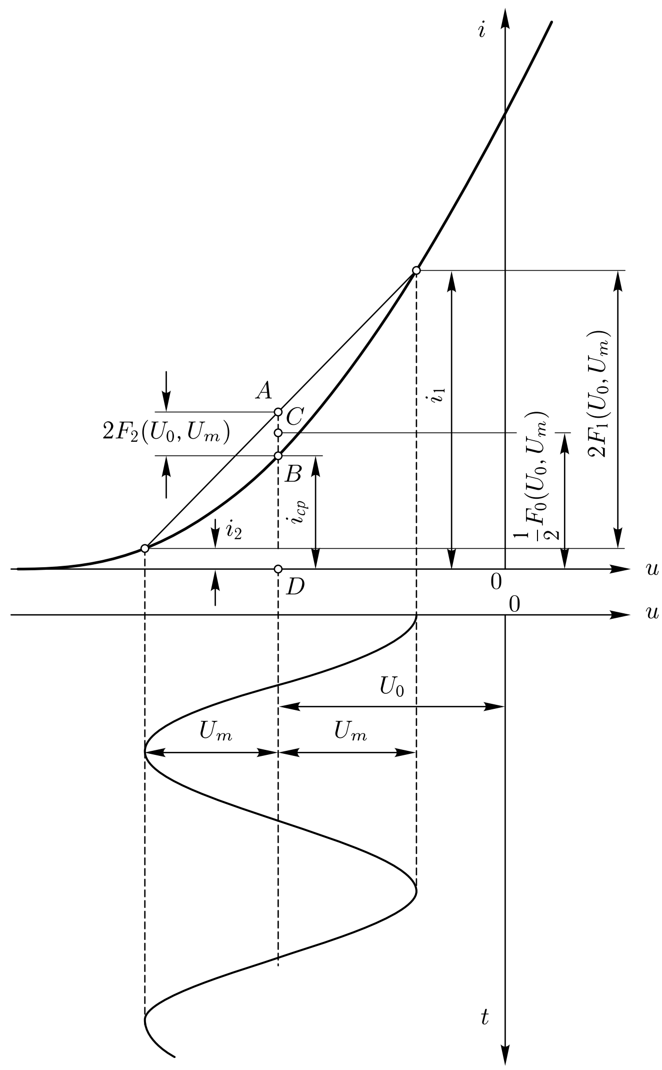

Рис. 8.5

Прибавляя к правой и левой частям равенства (8.21) величину $a_0 = i_{cp}$ и сравнивая результат с ф-лой (8.15), получим:

$$\frac{1}{2}\,F_0(U_0,\,U_m) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{i_1+i_2}{2} - i_{cp}\right) + i_{cp}. \tag{8.23}$$

Величины $1/2\,F_0(U_0,\,U_m)$, $F_1(U_0,\,U_m)$ и $F_2(U_0,\,U_m)$ могут быть легко найдены в соответствии с ф-лами (8.20), (8.22) и (8.23) графически, как это показано на рис. 8.5. В справедливости этого легко убедиться, если учесть, что

$$BD = i_{cp}, \quad AD = \frac{i_1 + i_2}{2},$$

$$AB = 2CB = \frac{i_1 + i_2}{2} - i_{cp}, \quad CD = \frac{1}{2}\left(\frac{i_1 + i_2}{2} - i_{cp}\right) + i_{cp}.$$

Пример 8.2

На сетку лампы с характеристикой $i_a = f(u_c)$, аппроксимированной степенным рядом, подается напряжение:

$$u_c = U_0 + U_m \cos\omega_0 t = -3 + 2\cos\omega_0 t \text{ В}.$$

Уравнение характеристики:

$$i_a = f(u_c) = b_0 + b_1 u_c + b_2 u_c^2,$$

где $b_0 = 5$ мА, $b_1 = 2$ мА/В, $b_2 = 0{,}2$ мА/В^2.

Найти нулевую составляющую, амплитуды первой и второй гармоник анодного тока.

Решение

1. Находим коэффициенты a_k разложения (8.12):

$$a_0 = f(U_0) = b_0 + b_1 U_0 + b_2 U_0^2 = 5 - 2 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 9 = 0{,}8 \text{ мА},$$

$$a_1 = \frac{f'(U_0)}{1!} = b_1 + 2b_2 U_0 = 2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 3 = 0{,}8 \text{ мА/В},$$

$$a_2 = \frac{f''(U_0)}{2!} = b_2 = 0{,}2 \text{ мА/В}^2,$$

$$a_3 = a_4 = \ldots = 0.$$

2. По ф-лам (8.15), (8,16), (8,17) определяем нулевую составляющую и амплитуды первой и второй гармоник:

$$I_{a0} = \frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 = 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 2^2 = 1{,}2 \text{ мА},$$

$$I_{a1} = F_1(U_0, U_m) = a_1 U_m = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6 \text{ мА},$$

$$I_{a2} = F_2(U_0, U_m) = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 2^2 = 0{,}4 \text{ мА}.$$

§ 8.5. Аппроксимация характеристик нелинейных сопротивлений показательной функцией

Вольтамперные характеристики сеточного тока многоэлектродных ламп и тока диодов при отрицательных и малых положительных напряжениях хорошо аппроксимируются выражением:

$$i = i_0 e^{au}, \tag{8.24}$$

где i_0 — ток, протекающий через нелинейное сопротивление при $u = 0$ (рис. 8.6), a — коэффициент, зависящий от температуры катода. Для ламп с оксидным катодом $a = (8 \div 10)$ 1/В.

Найдем нулевую составляющую и амплитуды гармоник тока, предположив, что u по-прежнему равно

$$u = U_0 + U_m \cos\alpha.$$

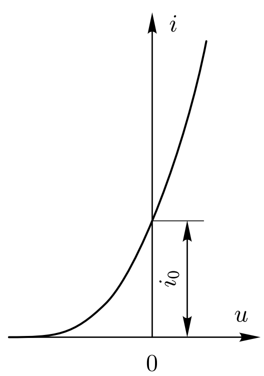

Рис. 8.6

Тогда

$$i = f(u) = i_0 \mathrm{e}^{a(U+U_m \cos\alpha)} = i_0 \mathrm{e}^{aU_0} \mathrm{e}^{aU_m \cos\alpha}.$$

Определить величины $1/2\, F_0(U_0, U_m)$, … …, $F_k(U_0, U_m)$ можно путем отыскания интегралов (8.46), однако проще поступить иначе.

Из теории функций Бесселя [1]) известно, что

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_n(m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

где $\mathrm{J}_n(m)$ — функция Бесселя n-го порядка.

Если положить

$$m = \mathrm{i}aU_m,$$
$$x = \alpha - \frac{\pi}{2},$$

то

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\sin x} = \mathrm{e}^{aU_m\cos\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_n(\mathrm{i}aU_m)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_n(\mathrm{i}aU_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\mathrm{i}^{-n},$$

так как

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^{-n} = \mathrm{i}^{-n}.$$

Функция Бесселя от мнимого аргумента обозначается так:

$$\mathrm{J}_n(\mathrm{i}y)\cdot \mathrm{i}^{-n} = \mathrm{I}_n(y),$$

причем

$$\mathrm{I}_{-n}(y) = \mathrm{I}_n(y).$$

Тогда

$$\mathrm{e}^{\alpha U_m\cos\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{I}_n(aU_m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = \mathrm{I}_0(aU_m) + \\ + \mathrm{I}_1(aU_m)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) + \mathrm{I}_2(aU_m)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\alpha}) + \ldots = \\ = \mathrm{I}_0(aU_m) + 2\mathrm{I}_1(aU_m)\cos\alpha + 2\mathrm{I}_2(aU_m)\cos 2\alpha + \ldots.$$

---

[1]) См. Кузьмин Р. О. «Бесселевы функции», ОНТИ, 1935 г., стр. 120, а также первую часть курса, стр. 206.

Окончательно получаем:

$$i = i_0 \mathrm{e}^{au} = i_0 \mathrm{e}^{aU_0} \left[\mathrm{I}_0(aU_m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_k(aU_m) \cos k\alpha \right]. \qquad (8.25)$$

Из сравнения выражения (8.25) с рядом (8.4а) видно, что

$$F_k(U_0, U_m) = 2 i_0 \mathrm{e}^{aU_0} \mathrm{I}_k(aU_m). \qquad (8.26)$$

Величины $\mathrm{I}_k(aU_m)$ приводятся в таблицах, имеющихся в математических справочниках. Эти величины могут быть найдены также из рис. 8.7.

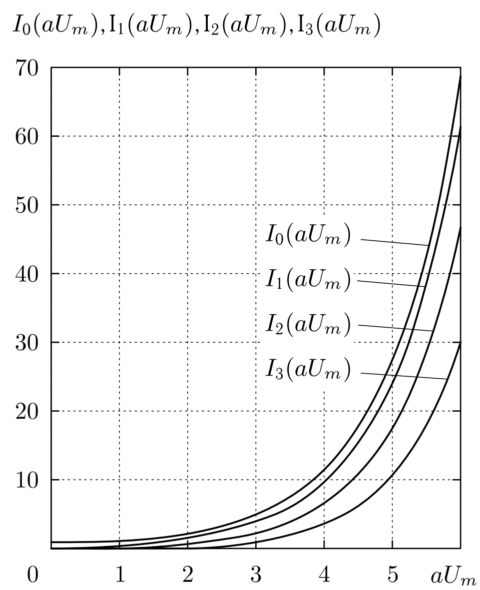

Рис. 8.7

Пример 8.3

К диоду с характеристикой $i = f(u)$, аппроксимированной показательной функцией, подведено напряжение:

$$u = U_0 + U_m \cos\omega_0 t = -0{,}5 + 0{,}4 \cos\omega_0 t \text{ В}.$$

Уравнение характеристики:

$$i = i_0 \mathrm{e}^{au} = 0{,}5 \mathrm{e}^{8u} \text{ мА}.$$

Найти нулевую составляющую и амплитуду первой гармоники тока.

Решение

На основании ф-лы (8.26)

$$I_0 = \frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) = i_0 \mathrm{e}^{aU_0} \mathrm{I}_0(aU_m) = 0{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-8 \cdot 0{,}5} \cdot 5{,}75 = 0{,}052 \text{ мА},$$

$$I_1 = F_1(U_0, U_m) = 2 i_0 \mathrm{e}^{aU_0} \mathrm{I}_1(aU_m) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-8 \cdot 0{,}5} \cdot 4{,}73 = 0{,}086 \text{ мА}.$$

Величины $\mathrm{I}_0(aU_m) = \mathrm{I}_0(3{,}2)$ и $\mathrm{I}_1(aU_m) = \mathrm{I}_1(3{,}2)$ могут быть определены с помощью рис. 8.7 или взяты из таблиц (см. например, Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. «Справочник по математике», ГИТТЛ, 1953 г., стр. 76–77 или Янке Е. и Эмде Ф. «Таблицы функций», ГИТТЛ, 1948 г., стр. 338–343).

§ 8.6. Одновременное воздействие на нелинейное сопротивление малого напряжения произвольной формы и большого синусоидального напряжения

В этом параграфе исследуется добавочный ток, протекающий через нелинейное сопротивление под действием некоторого малого напряжения при условии, что на это сопротивление одновременно действует еще большое синусоидальное напряжение.

Пусть под действием напряжения

$$u = U_0 + U_m \cos\alpha, \tag{8.27}$$

где

$$\alpha = \omega_0 t + \varphi,$$

через нелинейное сопротивление течет ток:

$$i = f(u) = \frac{1}{2} F_0(U_0, U_m) + F_1(U_0, U_m)\cos\alpha + \\ + F_2(U_0, U_m)\cos 2\alpha + \ldots . \tag{8.28}$$

Если на нелинейное сопротивление действует еще добавочное достаточно малое переменное напряжение Δu, то ток через сопротивление равен

$$i + \Delta i = f(u + \Delta u) \approx f(u) + f'(u)\cdot\Delta u, \tag{8.29}$$

где

$$f'(u) = \frac{\partial i}{\partial u},$$

откуда добавочный ток

$$\Delta i = f'(u)\Delta u = f'(U_0 + U_m\cos\alpha)\Delta u. \tag{8.30}$$

Отметим, что Δi линейно зависит от Δu, причем коэффициент пропорциональности $f'(u)$ меняется во времени. Таким образом, для добавочных тока и напряжения нелинейное сопротивление в этом случае может быть заменено *линейным, проводимость которого переменна и равна* $f'(u)$.

Схемы, содержащие такие линейные сопротивления, называются *линейными схемами с переменными параметрами. Для них справедлив принцип наложения*. Действительно, если на нелинейное сопротивление действует добавочное напряжение $\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2$, то добавочный ток равен

$$\Delta i = f'(u)(\Delta u_1 + \Delta u_2) = \Delta i_1 + \Delta i_2,$$

где $\Delta i_1 = f'(u)\Delta u_1$ — ток от добавочного напряжения Δu_1, $\Delta i_2 = f'(u)\Delta u_2$ — ток от добавочного напряжения Δu_2.

Величина $f'(u) = f'(U_0 + U_m \cos\alpha)$ является четной периодической функцией α и может быть представлена рядом Фурье аналогично величине $f(U_0 + U_m \cos\alpha)$ (§ 8.2).

Таким образом,

$$f'(U_0 + U_m \cos\alpha) = \frac{1}{2}\, g_0 + g_1 \cos\alpha + g_2 \cos 2\alpha + \ldots, \tag{8.31}$$

где

$$g_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m \cos\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha, \tag{8.32}$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \text{ и т. д.}$$

Если

$$\Delta u_1 = \delta U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{8.33}$$

то в соответствии с (8.30) получим

$$\Delta i_1 = \frac{1}{2}\, g_0 \delta U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + g_1 \delta U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos\alpha + \\ + g_2 \delta U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos 2\alpha + \ldots.$$

Но так как

$$\cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \cos k\alpha = \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(k\omega_0 t + k\varphi) = \\ = \frac{1}{2}\, \cos[(\omega_1 + k\omega_0)t + \varphi_1 + k\varphi] + \\ + \frac{1}{2}\, \cos[(\omega_1 - k\omega_0)t + \varphi_1 - k\varphi],$$

то

$$\Delta i_1 = \frac{1}{2}\, \delta U_m \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{|k|} \cos[(\omega_1 + k\omega_0)t + \varphi_1 + k\varphi]. \tag{8.34}$$

Следовательно, *при воздействии добавочного напряжения с частотой ω_1 добавочный ток имеет составляющие с частотами $\omega_1 + k\omega_0$, где $k = 0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2$ и т. д.*

Если Δu содержит несколько синусоидальных составляющих с частотами ω_1, ω_2 и т. д., то в соответствии с принципом наложения добавочный ток состоит из нескольких составляющих вида (8.34) и может быть разложен на слагаемые с частотами $\omega_1 + k\omega_0$, $\omega_2 + k\omega_0$ и т. д., где k — целые положительные или отрицательные числа либо нули.

Найдем зависимость между коэффициентами g_k и F_k. Беря интеграл (8.4б) по частям, получим:

$$F_k(U_0, U_m) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(U_0 + U_m\cos\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[f(U_0 + U_m\cos\alpha)\frac{\sin k\alpha}{k}\right]_{-\pi}^{+\pi} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m \circ \alpha)\frac{\sin k\alpha}{k}\, U_m \sin\alpha\, d\alpha.$$

Первое слагаемое при подстановке пределов дает нуль. Заменив произведение синусов через разность косинусов во втором слагаемом, получим

$$F_k(U_0, U_m) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m\cos\alpha)\frac{U_m}{2k}\,[\cos(k-1)\alpha -$$
$$- \cos(k+1)\alpha]\, d\alpha = \frac{U_m}{2k}\,(g_{k-1} - g_{k+1}), \quad (8.35)$$

где

$$g_{k-1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m\cos\alpha)\cos(k-1)\alpha\, d\alpha,$$
$$g_{k+1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m\cos\alpha)\cos(k+1)\alpha\, d\alpha.$$

Затем

$$\frac{\partial F_k(U_0, U_m)}{\partial U_m} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial U_m}\, f(U_0 + U_m\cos\alpha)\cos k\alpha\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m\cos\alpha)\cos\alpha\cos k\alpha\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f'(U_0 + U_m\cos\alpha)\frac{1}{2}\,[\cos(k-1)\alpha + \cos(k+1)\alpha]\, d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\,(g_{k-1} + g_{k+1}). \quad (8.36)$$

Из выражений (8.35) и (8.36) получим:

$$g_{k-1} = \frac{\partial F_k(U_0, U_m)}{\partial U_m} + k\frac{F_k(U_0, U_m)}{U_m} \tag{8.37}$$

и

$$g_{k+1} = \frac{\partial F_k(U_0, U_m)}{\partial U_m} - k\frac{F_k(U_0, U_m)}{U_m}. \tag{8.38}$$

Выше был рассмотрен случай, когда ток через нелинейное сопротивление зависел от одного напряжения u. В более общем случае ток может зависеть от напряжения на нелинейном сопротивлении и от величины управляющего параметра (например, от напряжения на аноде и на управляющей сетке). Для малых переменных напряжений в этом случае, как было показано в § 3.1, нелинейное сопротивление может быть заменено линейной схемой замещения (рис. 3.1 или 3.2).

Легко убедиться, просмотрев материал § 3.1, что ф-ла (3.3) и вытекающие из нее схемы замещения справедливы и для случая, когда Δu, Δv и Δi являются добавочными малыми колебаниями, а величины U_0 и V_0 — переменные. При этом параметры схем замещения S, r_i и μ [1]), которые зависят от U_0 и V_0, также будут переменными величинами, определяемыми ф-лами (3.4), (3.5) и (3.6).

Таким образом, если в схеме, содержащей нелинейные сопротивления, известны переменные напряжения и токи (основные) и надо найти добавочные токи от малых собственных колебаний или добавочных достаточно малых эдс, то для их отыскания нелинейные сопротивления могут быть заменены схемами замещения рис. 3.1 и 3.2. Параметры этих схем замещения линейны, т. е. не зависят от добавочных колебаний, и меняются во времени.

Сказанное справедливо и тогда, когда, помимо u и v, на нелинейное сопротивление действуют еще какие-либо другие известные переменные напряжения (приложенные, например, к дополнительным сеткам ламп). Необходимо только учитывать влияние этих напряжений на параметры схем замещения.

§ 8.7. Воздействие на нелинейное сопротивление нескольких больших синусоидальных колебаний

В этом параграфе кратко рассматривается случай воздействия на нелинейное сопротивление нескольких больших синусоидальных колебаний.

Будем считать, что

$$i = f(u) \tag{8.39}$$

[1]) В электронных лампах при напряжении на аноде, большем чем на других электродах, можно считать μ постоянным и не зависящим от U_0 и V_0.

и

$$u = U_0 + U_1 \cos\alpha_1 + U_2 \cos\alpha_2 + \ldots + U_n \cos\alpha_n, \qquad (8.40)$$
$$\alpha_1 = \omega_1 t + \varphi_1,$$
$$\alpha_2 = \omega_2 t + \varphi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = \alpha_n t + \varphi_n.$$

Входящие в эти выражения величины $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n; \varphi_1, \varphi_2, \ldots \ldots, \varphi_n$ могут быть как постоянными, так и нeременными.

Будем считать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ независимыми переменными.

Обозначим

$$U_0' = U_0 + U_2 \cos\alpha_2 + \ldots + U_n \cos\alpha_n. \qquad (8.41)$$

Тогда

$$u = U_0' + U_1 \cos\alpha_1, \qquad (8.42)$$

и по аналогии с § 8.2 можно записать

$$i = \frac{1}{2} F_0(U_0', U_1) + F_1(U_0', U_1) \cos\alpha_1 + F_2(U_0', U_1) \cos 2\alpha_1 + \\ + F_3(U_0', U_1) \cos 3\alpha_1 + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|}(U_0', U_1) \cos k_1\alpha_1, \qquad (8.43)$$

где

$$F_{|k_1|}(U_0', U_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(U_0' + U_1 \cos\alpha_1) \cos k_1\alpha_1 \, d\alpha_1.$$

В сумме (8.43) каждый член повторяется дважды за исключением нулевой составляющей, для которой $k_1 = 0$. Например, члены $k_1 = 3$ и $k_1 = -3$ равны между собой.

Положим

$$U_0' = U_0'' + U_2 \cos\alpha_2, \qquad (8.44)$$

где

$$U_0'' = U_0 + U_3 \cos\alpha_3 + \ldots + U_n \cos\alpha_n. \qquad (8.45)$$

Тогда

$$F_{|k_1|}(U_0', U_1) = F_{|k_1|}(U_0'' + U_2 \cos\alpha_2, U_1) \qquad (8.46)$$

будет периодической функцией α_2. Действуя методами § 8.2, эту величину по аналогии с (8.43) можно записать так:

$$F_{|k_1|}(U_0', U_1) = \frac{1}{2} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|\,|k_2|}(U_0'', U_1, U_2) \cos k_2\alpha_2, \qquad (8.47)$$

где

$$F_{|k_1|\,|k_2|}(U_0'', U_1, U_2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F_{|k_1|}(U_0'' + U_2\cos\alpha_2, U_1)\cos k_2\alpha_2\,d\alpha_2 =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(U_0'' + U_1\cos\alpha_1 + U_2\cos\alpha_2)\cos k_1\alpha_2\cos k_2\alpha_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2. \tag{8.48}$$

При вычислении этого интеграла следует считать величины U_0'', U_1, U_2 постоянными.

Подставляя (8.47) в (8.43), получим:

$$i = \frac{1}{4}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|\,|k_2|}(U_0'', U_1, U_2)\cos k_1\alpha_1\cos k_2\alpha_2 =$$
$$= \frac{1}{8}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|\,|k_2|}(U_0'', U_1, U_2)\cos(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) +$$
$$+ \frac{1}{8}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|\,|k_2|}(U_0'', U_1, U_2)\cos(k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2). \tag{8.49}$$

Второй член этого выражения равен первому, поскольку k_2 в обеих суммах принимает как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому

$$j = \frac{1}{4}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|\,|k_2|}(U_0'', U_1, U_2)\cos(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2).$$

В этой сумме каждый член также повторяется дважды, за исключением нулевой составляющей, для которой $k_1 = k_2 = 0$. Например, член с $k_1 = 3$ и $k_2 = -1$ равен члену с $k_1 = -3$ и $k_2 = 1$.

Полагая далее

$$U_0'' = U_0''' + U_3\cos\alpha_3, \tag{8.51}$$

и повторяя рассуждения, в конце концов придем к следующему выражению:

$$i = \frac{1}{2^n}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{+\infty}\ldots\sum_{k_n=-\infty}^{+\infty} F_{|k_1|\,|k_2|\ldots|k_n|}(U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n)\times$$
$$\times\cos(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n), \tag{8.52}$$

где

$$F_{|k_1|\,|k_2|\ldots|k_n|}(U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n) = \\ = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \ldots \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(U_0 + U_1 \cos\alpha_1 + U_2 \cos\alpha_2 + \ldots + U_n \cos\alpha_n) \times \\ \times \cos k_1\alpha_1 \cos k_2\alpha_2 \ldots \cos k_n\alpha_n \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n. \quad (8.53)$$

При вычислении этого интеграла надо полагать величины U_0, $U_1, \ldots, U_n$ постоянными.

Подставляя вместо α их значения, получим следующее выражение для фазы (т. е. аргумента) слагаемой тока:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = (k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \ldots + k_n\omega_n)t + \\ + k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + \ldots + k_n\varphi_n. \quad (8.54)$$

Частота этого слагаемого будет:

$$k_1\frac{d\alpha_1}{dt} + k_2\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots + k\frac{d\alpha_n}{dt} = \\ = k_1\left(\omega_1 + \frac{d\varphi_1}{dt}\right) + k_2\left(\omega_2 + \frac{d\varphi_2}{dt}\right) + \ldots + k_n\left(\omega_n + \frac{d\varphi_n}{dt}\right), \quad (8.55)$$

где $\frac{d\alpha_1}{dt} = \omega_1 + \frac{d\varphi_1}{dt}$, $\frac{d\alpha_2}{dt} = \omega_2 + \frac{d\varphi_2}{dt}$, $\ldots$, $\frac{d\alpha_n}{dt} = \omega_n + \frac{d\varphi_n}{dt}$ — частоты первого, второго, n-го колебания напряжения. Эта частота называется *комбинационной частотой N-го порядка*, причем

$$N = |k_1| + |k_2| + \ldots + |k_n|. \quad (8.56)$$

По этой терминологии m-я гармоника также называется комбинационной частотой m-го порядка.

Как видно из (8.54), сдвиги фаз составляющих тока образуются так же, как и частоты.

Амплитуды колебаний комбинационных частот в общем виде определяются ф-лой (8.53). Для конкретного расчета надо аппроксимировать характеристику нелинейного сопротивления какой-либо функцией.

При аппроксимации ломаной прямой уже при $n = 2$ интеграл (8.53) сводится к так называемому эллиптическому интегралу, который не выражается через элементарные функции. По этой причине в данном случае такую аппроксимацию используют редко.

При аппроксимации степенным рядом общее выражение амплитуд получается также довольно сложным. Поэтому в табл. 8.1 дано для справок значение этих амплитуд [1]) от различных членов степенного

---

[1]) Амплитуды в табл 8.1 обозначены сокращенно. Так, например, вместо $\frac{1}{8}\,F_{100}(U_0, U_1, U_2, U_3)$ обозначено $\frac{1}{8}\,F_{100}$.

ряда для $n = 3$. При $n = 2$ нужно положить $U_3 = 0$ и считать $\frac{1}{4} F_{|k_1|\,|k_2|} = \frac{1}{8} F_{|k_1|\,|k_2|\,|k_3|}$.

Таблица 8.1

a_0	$\frac{1}{8} F_{000} = a_0$
$a_1(u-U_0)$	$\frac{1}{8} F_{100} = \frac{1}{2} a_1 U_1$; $\quad \frac{1}{8} F_{010} = \frac{1}{2} a_1 U_2$; $\frac{1}{8} F_{001} = \frac{1}{2} a_1 U_3$
$a_2(u-U_0)^2$	$\frac{1}{8} F_{000} = \frac{1}{2} a_2 (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$ $\frac{1}{8} F_{200} = \frac{1}{4} a_2 U_1^2$; $\quad \frac{1}{8} F_{020} = \frac{1}{4} a_2 U_2^2$; $\quad \frac{1}{8} F_{002} = \frac{1}{4} a_2 U_3^2$; $\frac{1}{8} F_{110} = \frac{1}{2} a_2 U_1 U_2$; $\quad \frac{1}{8} F_{101} = \frac{1}{2} \alpha_2 U_1 U_3$; $\frac{1}{8} F_{011} = \frac{1}{2} a_2 U_2 U_3$
$a_3(u-U_0)^3$	$\frac{1}{8} F_{100} = \frac{3}{8} a_3 U_1 (U_1^2 + 2U_2^2 + 2U_3^2)$ $\frac{1}{8} F_{010} = \frac{3}{8} a_3 U_3 (U_2^2 + 2U_3^2 + 2U_1^2)$ $\frac{1}{8} F_{001} = \frac{3}{8} a_3 U_3 (U_3^2 + 2U_1^2 + 2U_2^2)$ $\frac{1}{8} F_{210} = \frac{3}{8} a_3 U_1^2 U_2$; $\quad \frac{1}{8} F_{201} = \frac{3}{8} a_3 U_1^2 U_3$; $\quad \frac{1}{8} F_{021} = \frac{3}{8} a_3 U_2^2 U_3$ $\frac{1}{8} F_{120} = \frac{3}{8} a_3 U_1 U_2^2$; $\quad \frac{1}{8} F_{102} = \frac{3}{8} a_3 U_1 U_3^2$; $\quad \frac{1}{8} F_{012} = \frac{3}{8} a_3 U_2 U_3^2$ $\frac{1}{8} F_{111} = \frac{3}{4} a_3 U_1 U_2 U_3$ $\frac{1}{8} F_{300} = \frac{1}{8} a_3 U_1^3$; $\quad \frac{1}{8} F_{030} = \frac{1}{8} a_3 U_2^3$; $\quad \frac{1}{8} F_{003} = \frac{1}{8} a_3 U_3^3$

Не указанные в таблице амплитуды равны нулю [например, амплитуда $1/8\,F_{100}$, соответствующая частоте $\omega_1 + \frac{d\varphi_1}{dt}$ от члена $a_2(u-U_0)^2$].

Нужно помнить, что одна и та же амплитуда будет у нескольких частот, так, например, амплитуда $1/8\,F_{210}$ будет у комбинационных частот:

$$
\begin{aligned}
&1)\ +2\omega_1 + \omega_2,\\
&2)\ +2\omega_1 - \omega_2,\\
&3)\ -2\omega_1 + \omega_2,\\
&4)\ -2\omega_1 - \omega_2.
\end{aligned}
$$

Здесь φ_1 и φ_2 приняты постоянными. Следует еще отметить, что колебания с первой и четвертой из этих частот, а также со второй и третьей одинаковы.

Если продолжить табл. 8.1, то можно установить, что *от члена со степенью m образуются составляющие тока со всеми возможными комбинационными частотами порядков m, $m-2$, $m-4$ и т. д. до 1 или 0.*

Таким образом, от членов четных степеней получаются комбинационные частоты четных порядков и в том числе нулевая составляющая, а от членов нечетных степеней — комбинационные частоты нечетных порядков.

При аппроксимации характеристики показательной функцией (8.24) интегрирование приводит к следующему выражению:

$$\frac{1}{2^n} F_{|k_1|\,|k_2|\ldots|k_n|}(U_0, U_1, U_2, \ \ldots, U_n) = \\ = i_0 \mathrm{e}^{aU_0} \mathrm{I}_{|k_1|}(aU_1) \cdot \mathrm{I}_{|k_2|}(aU_2) \ldots \mathrm{I}_{|k_n|}(aU_n). \tag{8.57}$$

Пример 8.4

Характеристика нелинейного сопротивления выражается четырьмя первыми членами ряда (8.12). Напряжение, действующее на нелинейное сопротивление, равно

$$u = U_0 + U_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + U_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Найти колебание с частотой $\omega_1 + \dfrac{d\varphi_1}{dt}$, а также колебание с частотой $2\left(\omega_2 + \dfrac{d\varphi_2}{dt}\right)$.

Решение

1. Колебание с частотой $\omega_1 + \dfrac{d\varphi_1}{dt}$ соответствует комбинациям $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$ и $k_1 = -1$, $k_2 = k_3 = 0$. Из табл. 8.1 видно, что оно имеет составляющие, не равные нулю, от членов первой и третьей степени, и выражается так:

$$\left[2 \cdot \frac{1}{2}\, a_1 U_1 + 2 \cdot \frac{3}{8}\, a_3 U_1 (U_1^2 + 2U - 2^2 + 2U_3^2)\right] \cos(\omega_1 t + \varphi_1).$$

2. Колебание с частотой $2\left(\omega_2 + \dfrac{d\varphi_2}{dt}\right)$ соответствует комбинациям $k_1 = k_3 = 0$, $k_2 = 2$ и $k_1 = k_3 = 0$, $k_2 = -2$. Из табл. 8.1 видно, что это колебание определяется только квадратичным членом и имеет следующий вид:

$$2 \cdot \frac{1}{4}\, a_2 U_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\varphi_2).$$